Corrigé de l'examen du 7 janvier 2019

Questions de cours : (2 × 3 pts)

Exercice 1. (4pts)

(1) La v.a. X_1 prend (presque sûrement) ses valeurs dans l'intervalle $[0,1]$ donc

$$\mathbf{P}(X_1 > t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t < 0. \\ 1-t & \text{si} \quad t \in [0,1]. \\ 0 & \text{si} \quad t \geq 1. \end{cases}$$

(2) Les v.a. $X_i, i \geq 1$ étant i.i.d., on a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y_n > t) &= \mathbf{P}(X_1 > t; \ldots; X_n > t)) \\ &= \mathbf{P}(X_1 > t)^n \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t < 0. \\ (1-t)^n & \text{si} \quad t \in [0,1]. \\ 0 & \text{si} \quad t \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

(3) Premièrement,

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(t) &= 1 - \mathbf{P}(Y_n > t)) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0. \\ 1-(1-t)^n & \text{si} \quad t \in [0,1]. \\ 1 & \text{si} \quad t \geq 1. \end{cases} \\ &\longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0. \\ 1 & \text{si} \quad t \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

On reconnait la fonction de répartition de la v.a. nulle donc $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers 0.
Deuxièmement,

$$\begin{aligned} F_{nY_n}(t) &= 1 - \mathbf{P}(Y_n > \frac{t}{n}) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0. \\ 1-(1-\frac{t}{n})^n & \text{si} \quad t \in [0,n]. \\ 1 & \text{si} \quad t \geq n. \end{cases} \\ &\longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0. \\ 1-e^{-t} & \text{si} \quad t \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

On reconnait la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1 donc $(nY_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 2. (4pts)

(1) La loi exponentielle de paramètre λ correspond à la loi $\Gamma(1,\lambda)$ donc

$$\phi_{X_1}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

(2) Les v.a. $X_i, i \geq 1$ étant i.i.d., on a

$$\begin{aligned}
\phi_{Z_n}(t) &= \mathbf{E}[e^{itZ_n}] \\
&= \mathbf{E}[e^{it\sum_{k=1}^n X_k}] \\
&= \prod_{k=1}^n \mathbf{E}[e^{itX_k}] \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^n
\end{aligned}$$

On reconnait la fonction de répartition de la loi $\Gamma(n, \lambda)$ donc Z_n est de loi $\Gamma(n, \lambda)$.

(3) On remarque en utilisant la FDT que

$$\frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} g\left(\frac{x}{n}\right) x^{n-1} e^{-\lambda x} dx = \mathbf{E}\left[g\left(\frac{Z_n}{n}\right)\right].$$

D'après la LFGN, (Z_n/n) converge presque sûrement vers $\mathbf{E}[X_1] = 1/\lambda$ donc (g est continue), $(g(Z_n/n))$ converge presque sûrement vers $g(1/\lambda)$. De plus, g est bornée donc d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\mathbf{E}\left[g\left(\frac{Z_n}{n}\right)\right] \to \mathbf{E}\left[g\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right] = g\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Exercice 3. (3pts)

(1) On réécrit

$$f_1(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}e^{-x/2}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2.4}\right).$$

On a ici un mélange de la loi $\mathcal{E}(1/2)$ et de la loi Normale $\mathcal{N}(0,4)$. Soit U_1, U_2, U_3, U_4 des v.a.i. de loi uniforme sur $[0,1]$. On utilise la méthode de Box-Muller pour simuler la loi Normale. On pose $S = -2\ln(U_3)$, $\theta = 2\pi U_4$. Alors,

$$X = \mathbf{1}_{[0,\frac{2}{3}]}(U_1)(-2\ln(U_2)) + \mathbf{1}_{[\frac{2}{3},1]}(U_1)(2\sqrt{S}\cos(\theta))$$

a pour densité f_1.

(2) Par un simple calcul, la fonction de répartition de la loi de Weibull est donnée par

$$F_2(t) = (1 - e^{-t^a})\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

L'inverse de F_2 est donnée par

$$u \to \ln\left(\frac{1}{1-u}\right)^{1/a}.$$

On utilise la méthode de la fonction inverse. Soit U de loi uniforme sur $[0,1]$, la v.a.

$$\ln\left(\frac{1}{1-U}\right)^{1/a} \quad (\text{ou} \quad (-\ln U)^{1/a})$$

a pour densité f_2.

(3) Un simple calcul de maximum donne

$$\frac{f_3(x)}{f_2(x)} = \frac{e^{x^a - x}}{a\Gamma(a)} \leq \frac{\exp(b(1-a))}{\Gamma(a+1)} =: c$$

où $b = a^{a/(1-a)}$. On utilise la méthode du rejet. On génère une suite $(X_i, cf_2(X_i)U_i), i \geq 1$ où les v.a. X_i sont indépendantes, de densité f_2 et les U_i sont des v.a.i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$, indépendantes des X_i. On s'arrête au premier indice i_0 tel que $cf_2(X_{i_0})U_{i_0} \leq f_3(X_{i_0})$. Alors, X_{i_0} a pour densité f_3.

Exercice 4. (4pts)

(1) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(|X_n - an^\alpha| \geq \delta n^\alpha\right) &\leq \frac{\operatorname{Var}(X_n)}{\delta^2 n^{2\alpha}} \\ &\leq \frac{M}{\delta^2} n^{\beta - 2\alpha} \end{aligned}$$

(2) $n_k = \lfloor k^{2/2\alpha-\beta} \rfloor$. D'après (1),

$$\sum_{k \geq 1} \mathbf{P}\left(|X_{n_k} - an_k^\alpha| \geq \delta n_k^\alpha\right) \leq \frac{M}{\delta^2} \sum_{k \geq 1} n_k^{\beta - 2\alpha}$$

Or $n_k^{\beta-2\alpha} \sim 1/k^2$, donc la série ci-dessus converge.
On note pour tout $k \geq 1$,

$$A_k = \{|X_{n_k} - an_k^\alpha| \geq \delta n_k^\alpha\}.$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli,

$$\mathbf{P}(\limsup_k A_k) = 0$$

ou de manière équivalente

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_n \bigcap_{k \geq n} A_k^c\right) = 1.$$

Pour presque tout $\omega \in \Omega$, pour tout $\delta > 0$, il existe n tel que pour tout $k \geq n$,

$$\left| \frac{X_{n_k}}{n_k^\alpha} - a \right| < \delta$$

ce qui signifie que $\left(\frac{X_{n_k}}{n_k^\alpha}\right)_k$ converge presque sûrement vers a.

(3) Pour tout n, il existe $k = k_n$ tel que

$$\lfloor k_n^{2/2\alpha-\beta} \rfloor \leq n \leq \lfloor (k_n+1)^{2/2\alpha-\beta} \rfloor$$

(prendre $k_n = \lfloor n^{(2\alpha-\beta)/2} \rfloor$). Les v.a. $X_n, n \geq 1$ étant croissantes, on a

$$\frac{\lfloor k_n^{2/2\alpha-\beta} \rfloor^\alpha}{n^\alpha} \frac{X_{\lfloor k_n^{2/2\alpha-\beta} \rfloor}}{\lfloor k_n^{2/2\alpha-\beta} \rfloor^\alpha} \leq \frac{X_n}{n^\alpha} \leq \frac{\lfloor (k_n+1)^{2/2\alpha-\beta} \rfloor^\alpha}{n^\alpha} \frac{X_{\lfloor (k_n+1)^{2/2\alpha-\beta} \rfloor}}{\lfloor (k_n+1)^{2/2\alpha-\beta} \rfloor^\alpha}.$$

La convergence presque sûre de X_n/n^α vers a découle du fait que par (2), les suites $\left(\frac{X_{\lfloor k_n^{2/2\alpha-\beta} \rfloor}}{\lfloor k_n^{2/2\alpha-\beta} \rfloor^\alpha}\right)_{n \geq 1}$ et $\left(\frac{X_{\lfloor (k_n+1)^{2/2\alpha-\beta} \rfloor}}{\lfloor (k_n+1)^{2/2\alpha-\beta} \rfloor^\alpha}\right)_{n \geq 1}$ convergent presque sûrement vers a.